

CISZTERCI REND NAGY LAJOS GIMNÁZIUMA  
ÉS KOLLÉGIUMA

HELYI TANTERV

Matematika  
11.-12. évfolyam emelt érettségire felkészítő

PÉCS  
2023



- I. **A KERETTANTERVI HIVATKOZÁS**  
 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról  
 NAT 2020-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók  
[https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020\\_nat](https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat)
- II. **ÉRVÉNYESSÉG KEZDETE:** 2020. szeptember 01.
- III. **A TANTÁRGY ÓRAKERETE:**

| <b>Évfolyam</b> | <b>Heti óraszám</b> |
|-----------------|---------------------|
| 11. évfolyam    | 3+3                 |
| 12. évfolyam    | 3+3                 |

- IV. **A TANTÁRGGYAL KAPCSOLATOS PEDAGÓGIAI SZERVEZÉSI MEGJEGYZÉSEK**  
 A matematika tantárgyat minden évfolyamon csoportbontásban valósítjuk meg.
- V. **A TANULÓ ÉRTÉKELÉSE**  
 Pedagógiai program kiegészítése tartalmazza.
- VI. **A TANESZKÖZÖK KIVÁLASZTÁSÁNAK ELVEI**  
 Hivatalos tankönyvjegyzékben szereplő tankönyvek.
- VII. **ÉRETTSÉGI VIZSGA**  
 10. évfolyam végén a tanulók választhatnak az emelt és a középszintű érettségi felkészítés között.
- VIII. **TANTÁRGYI RÉSZ**

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetethők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló

mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alaphalmazának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a Nat-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának képességét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének képességét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának képességrendszer.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozik olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulása során erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projektekben való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményező-készség, másokkal való együttműködés készsége).

A hat évfolyamos gimnáziumi képzésben a matematika tanulása-tanítása során a tudástartalmak fokozatosan válnak egyre elvontabbá. A konkrét tárgyi tevékenységekből indulva a képi szemléltetések, ábrázolások mellett egyre inkább megjelennek a szimbolikus modellek. A tanuló a fogalmak, jelenségek elemzése útján eljut azok megértésén alapuló meghatározásához, a definíciók előkészítése során tulajdonságokat, sejtéseket fogalmaz meg, s kialakul a megoldást alátámasztó indoklás igénye. Felismeri a matematika kisebb egységeinek belső struktúráját.

A 7–8. évfolyamon a tanítás fő módszere a felfedeztetés, a konkrét tevékenységből, játékból, hétköznapi szituációból fakadó indukció. A tanuló konkrét helyzetek megoldására modelleket, stratégiákat alkalmaz és alkot, ezáltal fejlődik problémamegoldó és problémaalkotó képessége.

A 9. évfolyamtól kezdődően hangsúlyosabbá válik a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának fejlesztése. A spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztethetők. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A

felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. A bizonyítások, indoklások önálló felfedezése fejleszti a tanulók érvelési képességét, mérlegelő gondolkodását. Néhány tétel bizonyítása elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése.

A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát. A kombinatív képességek területén a lehetőségek strukturált felsorolásából fokozatosan kialakulnak a rendszerezést segítő konkrét eszközök, stratégiák alkalmazásának készségei.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. A tanulók megtapasztalják a matematika alkalmazhatóságát, hasznosságát.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Az új fogalmak, magasabb szintű absztrakciót igénylő tudástartalmak bevezetésekor az egyéni adottságokhoz, ismeretekhez alkalmazkodó differenciálás biztosítja a megfelelő tempójú haladást annak a tanulónak, akinél ezek a lépések hosszabb időt, több szemléltetést igényelnek. Ezzel a lassabban haladó tanuló sem veszíti el érdeklődését a matematika iránt.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

## **A . 11 – 12 . É V F O L Y A M**

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznék feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a

szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

A 11–12. évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszámja tagozatonként és emelt szint is különböző. Rendszerező összefoglalásra, az érettségi vizsgára történő felkészítésre a 12. évfolyam végén áll rendelkezésre. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre.

**A 11-12. évfolyamos témakörök áttekintő táblázata:**

### **EMELT SZINTŰ KÉPZÉS (FAKULTÁCIÓ)**

| <b>Témakör neve</b>                                      | <b>Javasolt óraszám</b> |
|--|-------------------------|
| <b>Halmazok, matematikai logika</b>                      | <b>13</b>               |
| <b>Kombinatorika, gráfok</b>                             | <b>22</b>               |
| <b>Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése</b>      | <b>30</b>               |
| <b>Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus</b> | <b>26</b>               |
| <b>Exponenciális folyamatok vizsgálata</b>               | <b>26</b>               |
| <b>Sorozatok, függvénytan</b>                            | <b>39</b>               |
| <b>Trigonometria</b>                                     | <b>30</b>               |
| <b>Térgeometria</b>                                      | <b>43</b>               |
| <b>Koordinátageometria</b>                               | <b>30</b>               |
| <b>Leíró statisztika</b>                                 | <b>26</b>               |
| <b>Valószínűség-számítás</b>                             | <b>35</b>               |
| <b>Rendszerező összefoglalás</b>                         | <b>82</b>               |
| <b>Összes óraszám:</b>                                   | <b>402</b>              |

## **Témakör: Halmazok, matematikai logika**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;  
megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;  
tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül

Logikai kifejezések megfelelő használata

Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása

Stratégiai és logikai játékok

### **Fogalmak**

logikai műveletek

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása  
igazságtáblázat segítségével

Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül

Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”

Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok

Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

## **Témakör: Kombinatorika, gráfok**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú  
információkat kigyűjti, rendszerezi;

a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;

a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;

konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok  
megoldása

A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása

Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül

A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában

## **Fogalmak**

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Anagramma készítése a tanulók neveiből

A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása

A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével

Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése

Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátszása, a tapasztalatok összegyűjtése

## **Témakör: Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;

összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;

meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;

ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;

érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;

ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;

ismer példákat irracionális számokra.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezősz felbontásból

Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása

Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)

Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben

Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata

A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig

Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete

Példák irracionális számokra

Számhalmazok műveleti zártága

## **Fogalmak**

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímelek



## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása

Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények

Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól

Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás

Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

## **Témakör: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök fogalmát;

ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;

képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;

adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Az  $n$ -edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása

Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén

Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén

A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén

Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai

A logaritmus értelmezése

Áttérés más alapú logaritmusra

Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához

### **Fogalmak**

$n$ -edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt

Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában

Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában

Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével

10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel



## **Témakör: Exponenciális folyamatok vizsgálata**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;  
ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;  
a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;  
a kiválasztott modellben megoldja a problémát;  
a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;  
egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi;  
megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban

Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése

Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése

A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása

A kiválasztott modellben a probléma megoldása

A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

### **Fogalmak**

Nincsenek új fogalmak.

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban

Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában

Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

## **Témakör: Sorozatok**

## **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:** ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;

a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;

a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;

ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;

mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

## **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

A számsorozat fogalmának ismerete

Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval

Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint

Számtani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege

Mértani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege

A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása

Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában

Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása

Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása

Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása

## **Fogalmak**

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat

Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével

A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása

Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

## **Témakör: Trigonometria**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:** ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;  
ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;  
ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;  
alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;  
a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;  
kiszámítja háromszögek területét;  
ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;  
átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

## **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense

Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben

Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense

Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei

Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével

Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében

Színusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása

A színusztétel bizonyítása

Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével

A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva

Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

## **Fogalmak**

színusz, koszinusz, tangens, színusztétel, koszinusztétel

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése

Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján

Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

## **Témakör: Térgeometria**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

ismeri és alkalmazza a színusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;

ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;

ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;

sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;

ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;

lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;

kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;

ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;

ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

## **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Tételek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban

A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete

Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete

Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben

A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban

A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben

A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással

Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása

A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

## **Fogalmak**

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Hétköznapi tárgyak (üdítődoboz, vizesflakon, tejfölddoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel

A Louvre bejáratként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)

Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén  
Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése mérésrel  
A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellel mérésrel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal  
Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

## **Témakör: Koordinátageometria**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;  
ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;  
alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;  
megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;  
koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő pontthalmazokat;  
koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;  
ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;  
egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;  
kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;  
megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;  
felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása  
A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása  
Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában  
Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben  
Adott feltételeknek megfelelő pontthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben  
Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján  
Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái  
Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján  
Egyenes egyenlete  $y = mx + b$  vagy  $x = c$  alakban  
Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján  
Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái  
A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében

## **Fogalmak**

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

„Torpedójáték” koordináta-rendszerben

Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével

Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján

Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával

Gondolattérkép készítése a koordinátageometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában

„Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével

„Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

## **Témakör: Leíró statisztika**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;

hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;

ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására; felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete

Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése

Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középpértékekkel és szóródási mutatókkal

Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása

A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések

Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal

Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

## **Fogalmak**

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

## **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre

Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között



A Simpson-paradoxon bemutatása példákon

Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása

Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

## **Témakör: Valószínűség-számítás**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;

ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;

ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;

meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre

Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására

Példák ismerete független és nem független eseményekre

A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása

A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása

Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén

A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban

Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

### **Fogalmak**

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetekre, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában

Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában

Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével

Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása

Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése

Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

